JOURNAL OF APPROXIMATION THEORY 23, 242–260 (1978)

Spline-Funktionen mehrerer Veränderlicher

EGON SCHEFFOLD

Fachbereich Mathematik der Technischen Hochschule Darmstadt, 6100 Darmstadt, West Germany

UND

KARL-HEINZ SCHLOSSER

Rechenzentrum der Ruhr-Universität Bochum, 4630 Bochum, West Germany

Communicated by Lothar Collatz

Received December 16, 1976

In this paper a spline interpolation problem for functions of several variables, given by a Taylor expansion with integral remainder, is completely solved.

EINLEITUNG

Es sei I ein abgeschlossenes, endliches Intervall der reellen Achse $\mathbb{R}$.[1] Es bezeichne $C^{(m)}(I)$ den Vektorraum der m-mal stetig differenzierbaren, reellwertigen Funktionen auf I. Für $1 \leqslant m \in \mathbb{N}$ sei

$$K^{2,m}(I) := \{f \in C^{(m-1)}(I): f^{(m-1)} \text{ absolut stetig und } f^{(m)} \in L^2(I)\}.$$

Der Vektorraum $K^{2,m}(I)$ wurde von Schoenberg [18] eingeführt. Es hat sich gezeigt, daß dieser Vektorraum für die Behandlung der Spline-Funktionen einer Veränderlichen sehr geeignet ist (vgl. z.B. Schempp [14] und Scheffold [12]). Ziel vieler Veröffentlichungen war daher eine Verallgemeinerung dieses Raumes auf Teilmengen Ω des $\mathbb{R}^n$. Doch beschränken sich die meisten Autoren auf ganz spezielle Teilmengen Ω des $\mathbb{R}^2$ wie z.B. auf Rechtecke und sogenannte L- und T-förmige Mengen (vgl. Delvos–Schlosser [2], Mansfield [4–7], Nielson [8], Ritter [9] oder Sard [10]).

In Schlosser [15] und Kösters-Schlosser [3] wird für eine Klasse von Teilmengen Ω des $\mathbb{R}^2$ ein Spline-Funktionenraum $K^{m,n}(\Omega)$ betrachtet, der für gewisse $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ einige der vorher erwähnten Räume als Spezialfall enthält.

[1] Mit $\mathbb{N}$ bzw. $\mathbb{C}$ bezeichnen wir die Menge der natürlichen bzw. komplexen Zahlen.

0021-9045/78/0233–0242$02.00/0

In der vorliegenden Arbeit behandeln wir eine Verallgemeinerung des von Schlosser [15] eingeführten Spline-Funktionenraumes auf Teilmengen $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ($n \geqslant 1$) mit einer gewissen "Quadereigenschaft". In diesem Rahmen untersuchen wir dann die Spline-Interpolation mit Spline-Funktionen mehrerer Veränderlicher.

Im 1. Kapitel führen wir den Spline-Funktionenraum $K^m(\Omega)$ ($\Omega \subset \mathbb{R}^n$, $m = (m_1, ..., m_n)$) ein. Das 2. Kapitel befaßt sich mit der Interpolation in diesem Funktionenraum. Im dritten Kapitel untersuchen wir die Approximation von Linearformen im Sinne von Sard. Wir beweisen dabei eine "Peanokern-Darstellung" und einen Approximationssatz vom Schoenberg'schen Typ. Im 4. Kapitel geben wir eine Methode zur Bestimmung der Spline-Interpolierenden an und im abschließenden 5. Kapitel veranschaulichen wir unsere Methode am Beispiel der Spline-Interpolation auf der Einheitskreisscheibe.

1. Der Raum $K^m(\Omega)$

Im folgenden sei Ω immer eine nichtleere, nicht einpunktige, kompakte Teilmenge des $\mathbb{R}^n$ ($n \in \mathbb{N}$ fest), welche die folgende "*lokale Quadereigenschaft*" (Q) besitzt:

Es existiert in Ω ein Punkt $z = (z_1, ..., z_n)$, so daß für alle von z verschiedenen Punkte $x = (x_1, ..., x_n)$ in Ω der von x und z aufgespannte, achsenparallele, n-dimensionale Quader in Ω enthalten ist.

Bezeichnen wir für zwei verschiedene reelle Zahlen r_1 und r_2 die Verbindungsstrecke mit $| r_1, r_2 |$, so bedeutet die Eigenschaft (Q):

Es gibt ein $z \in \Omega$, so daß

$$\prod_{i=1}^{n} | x_i, z_i | \subset \Omega \qquad \text{für alle } x \in \Omega \text{ gilt.}$$

Zum Beispiel besitzen alle n-dimensionalen Kugeln und alle n-dimensionalen, achsenparallelen Quader die Eigenschaft (Q).

Es sei $m = (m_1, ..., m_n) \in \mathbb{N}^n$ (also $m_i \geqslant 1$) ein Multiindex und J eine nichtleere Teilmenge der Menge $\{1, ..., n\}$ mit Komplement J^c. Mit p_J bezeichnen wir dann die Projektion des Raumes $\mathbb{R}^n$ auf den Produktraum $\prod_{i \in J} R_i$ mit $R_i = \mathbb{R}$ für alle i:

$$\mathbb{R}^n \ni x \mapsto p_J(x) = (x_i)_{i \in J}.$$

Für $p_J(x)$ bzw. $p_J(\Omega)$ schreiben wir kurz x_J bzw. Ω_J. Dann ist offensichtlich

Ω_J eine kompakte Teilmenge des Produktraumes $\prod_{i \in J} R_i$, welche bezüglich des Punktes z_J die Eigenschaft (Q) besitzt.

Die Menge der Multiindizes sei im folgenden immer mit der üblichen koordinatenweisen Ordnung versehen, d.h., es ist genau dann $m \leqslant m'$, wenn $m_i \leqslant m'_i$ für $1 \leqslant i \leqslant n$ ist.

Mit 1 bezeichnen wir den Multiindex, der aus n Einsen besteht. Entsprechend x_J ist $m_J = (m_i)_{i \in J}$ für $m \in \mathbb{N}^n$. Wie üblich schreiben wir $|J|$ für die Anzahl der Elemente der Teilmenge J.

Für $a, x \in \mathbb{R}^n$ und $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$ sei per definitionem

$$\int_{a_1}^{x_1} \cdots \int_{a_n}^{x_n} f(s)\, ds := \prod_{i=1}^{n} \operatorname{sign}(x_i - a_i) \cdot \int_{\min(a_1, x_1)}^{\max(a_1, x_1)} \cdots \int_{\min(a_n, x_n)}^{\max(a_n, x_n)} f(s)\, ds,$$

wobei $\operatorname{sign}(u) = 1$ für $0 \leqslant u \in \mathbb{R}$ und $\operatorname{sign}(u) = -1$ für $0 > u \in \mathbb{R}$ ist.

Aus der Integrationstheorie benötigen wir das folgende Lemma:

LEMMA 1.1. *Es sei* $a, x \in \mathbb{R}^n$, $p \in \mathbb{N}^n$, $f, \tilde{f} \in L^1(\mathbb{R}^n) \cap L^2(\mathbb{R}^n)$,

$$g(x) := \int_{a_1}^{x_1} \cdots \int_{a_n}^{x_n} \prod_{i=1}^{n} \left((x_i - s_i)^{p_i} \frac{1}{p_i!} \right) f(s)\, ds,$$

$$h(x) := \int_{a_1}^{x_1} \cdots \int_{a_n}^{x_n} f(s)\, ds,$$

und

$$\tilde{h}(x) := \int_{a_1}^{x_1} \cdots \int_{a_n}^{x_n} \tilde{f}(s)\, ds.$$

Dann gilt:

(α) *Für* $0 \leqslant \mu \leqslant p$ *besitzt* g *stetige, von der Differentiationsreihenfolge unabhängige* μ*-te partielle Ableitungen auf ganz* $\mathbb{R}^n$.

Es ist

$$g^{(\mu)}(x) = \int_{a_1}^{x_1} \cdots \int_{a_n}^{x_n} \prod_{i=1}^{n} ((x_i - s_i)^{p_i - \mu_i}) \frac{1}{(p_i - \mu_i)!} f(s)\, ds,$$

d.h., es darf unter dem Integralzeichen differenziert werden.

(β) *Aus* $h(x) = \tilde{h}(x)$ *für alle* $x \in \mathbb{R}^n$ *folgt* $f = \tilde{f}$ *fast überall im Sinne des Lebesgue-Maßes.*

Beweis. *Zu* (α): Es sei $1 \leqslant j \leqslant n$ und $0 \leqslant \mu_j \leqslant p_j$. Durch Anwendung des Satzes von Fubini erhält man:

$$g(x) = \int_{a_j}^{x_j} (x_j - s_j)^{p_j} \frac{1}{p_j!} \cdot \Big(\int_{a_i}^{x_i} \underset{i \neq j}{\cdots} \int_{a_i}^{x_i} \prod_{i \neq j} \Big((x_i - s_i)^{p_i} \frac{1}{p_i!} \Big) f(s) \, d \prod_{i \neq j} s_i \Big) \, ds_j$$

$$= \int_{a_j}^{x_j} (x_j - s_j)^{p_j} \frac{1}{p_j!} k(s_j) \, ds_j ,$$

wobei $k(s_j)$ fast überall gleich einer integrierbaren Funktion aus $L^1(\mathbb{R})$ ist.

Für variables x_j und festgehaltene x_i mit $i \neq j$ folgt dann

$$\frac{\partial^{\mu_j} g}{\partial x_j^{\mu_j}} (x) = \int_{a_j}^{x_j} \frac{(x_j - s_j)^{p_j - \mu_j}}{(p_j - \mu_j)!} k(s_j) \, ds_j \qquad \text{(s. [1, 5.9])}.$$

Setzt man für $k(s_j)$ wieder das entsprechende Integral ein, so ergibt sich

$$\frac{\partial^{\mu_j} g}{\partial x_j^{\mu_j}} (x) = \int_{a_1}^{x_1} \cdots \int_{a_n}^{x_n} \prod_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^{n} \frac{(x_i - s_i)^{p_i}}{p_i!} \cdot \frac{(x_j - s_j)^{p_j - \mu_j}}{(p_j - \mu_j)!} f(s) \, ds.$$

Hieraus erhält man, daß g μ-te partielle Ableitungen der angegebenen Gestalt besitzt.

Für $x, y \in \mathbb{R}^n$ gilt

$$\begin{aligned} g^{(\mu)}(x) - g^{(\mu)}(y) = {} & (g^{(\mu)}(x_1, ..., x_n) - g^{(\mu)}(y_1, x_2, ..., x_n)) \\ & + (g^{(\mu)}(y_1, x_2, ..., x_n) - g^{(\mu)}(y_1, y_2, x_3, ..., x_n)) \\ & + \cdots + (g^{(\mu)}(y_1, y_2, ..., y_{n-1}, x_n) - g^{(\mu)}(y_1, ..., y_n)). \end{aligned}$$

Da $\prod_{i=1}^{n} (x_i - s_i)^{p_i - \mu_i} / (p_i - \mu_i)!$ stetig und $f \in L^2(\mathbb{R}^n)$ ist, erhält man durch Anwendung der Hölderschen Ungleichung, daß die Absolutbeträge der einzelnen Klammerausdrücke beliebig klein gemacht werden können, falls nur die Punkte x und y hinreichend nahe beieinander liegen. Die partiellen Ableitungen sind also stetig.

Zu (β). Sei $a_i, b_i \in \mathbb{R}$ mit $a_i \leqslant b_i$ $(1 \leqslant i \leqslant n)$. Dann läßt sich $\int_{a_1}^{b_1} \cdots \int_{a_n}^{b_n} f(s) \, ds$ als endliche Summe von Gliedern der Form $(\pm)\, h(x_k)$ darstellen, z.B. gilt für $n = 2$:

$$\int_{a_1}^{b_1} \int_{a_2}^{b_2} f(s) \, ds = h(a_1, a_2) - h(a_1, b_2) - h(b_1, a_2) + h(b_1, b_2).$$

Ist nun $h(x) = \tilde{h}(x)$ für alle $x \in \mathbb{R}^n$, so erhalten wir

$$\int_{a_1}^{b_1} \cdots \int_{a_n}^{b_n} f(s) \, ds = \int_{a_1}^{b_1} \cdots \int_{a_n}^{b_n} \tilde{f}(s) \, ds.$$

Hieraus folgt aber, daß auf der σ-Algebra der Lebesgue-meßbaren Mengen des $\mathbb{R}^n$ die signierten Maße mit den Dichten f und $\tilde{f}$ bezüglich des Lebesgue-Maßes identisch sind. Dann stimmt aber bekanntlich f fast überall mit $\tilde{f}$ überein.

Mit Hilfe der vorhergehenden Bezeichnungen definieren wir nun den Funktionenraum $K^m(\Omega)$ wie folgt:

DEFINITION 1.2. Eine auf ganz $\mathbb{R}^n$ definierte reellwertige Funktion f gehört zu $K^m(\Omega)$, wenn sie folgende "Taylorentwicklung mit Integralgliedern" besitzt:

$$\begin{aligned} f(x) = & \sum_{0 \leqslant p \leqslant m-1} c_p \prod_{i=1}^{n} \frac{(x_i - z_i)^{p_i}}{p_i!} \\ & + \sum_{\substack{0 \leqslant p_J \leqslant m_J - 1_J \\ 1 \leqslant |J| \leqslant n-1}} \prod_{i \in J} \frac{(x_i - z_i)^{p_i}}{p_i!} \int_{z_i}^{x_i} \underset{i \in J^c}{\cdots} \int_{z_i}^{x_i} \prod_{i \in J^c} \frac{(x_i - s_i)^{m_i - 1}}{(m_i - 1)!} f_{p_J}(s_{J^c})\, ds_{J^c} \\ & + \int_{z_1}^{x_1} \cdots \int_{z_n}^{x_n} \prod_{i=1}^{n} \frac{(x_i - s_i)^{m_i - 1}}{(m_i - 1)!} f_m(s)\, ds, \end{aligned}$$

wobei $c_p \in \mathbb{R}$, $f_{p_J} \in L^2\left(\prod_{i \in J^c} R_i\right)$, $f_m \in L^2(\mathbb{R}^n)$,

$f_{p_J} \equiv 0$ außerhalb Ω_{J^c} und $f_m \equiv 0$ außerhalb Ω ist.

Es scheint, daß der Raum $K^m(\Omega)$ als ein spezieller Sobolev-Raum aufgefaßt werden kann. Da die folgenden Untersuchungen über $K^m(\Omega)$ mit einfachen Mitteln aus der Analysis angestellt werden können, wird auf den Versuch verzichtet, die nicht jedermann vertraute Theorie der Sobolev-Räume heranzuziehen.

Setzt man

$$k_{p_J}(x, s_{J^c}) := \prod_{i \in J} \frac{(x_i - z_i)^{p_i}}{p_i!} \cdot \prod_{i \in J^c} \frac{(x_i - s_i)^{m_i - 1}}{(m_i - 1)!},$$

so lassen sich die Funktionen $f \in K^m(\Omega)$ mit Hilfe der Größen c_p, f_{p_J} und f_m in der folgenden Form darstellen:

$$\begin{aligned} f(x) = & \sum_{0 \leqslant p \leqslant m-1} c_p \prod_{i=1}^{n} \frac{(x_i - z_i)^{p_i}}{p_i!} \\ & + \sum_{\substack{0 \leqslant p_J \leqslant m_J - 1_J \\ 1 \leqslant |J| \leqslant n-1}} \int_{z_i}^{x_i} \underset{i \in J^c}{\cdots} \int_{z_i}^{x_i} k_{p_J}(x, s_{J^c})\, f_{p_J}(s_{J^c})\, ds_{J^c} \\ & + \int_{z_1}^{x_1} \cdots \int_{z_n}^{x_n} \prod_{i=1}^{n} \frac{(x_i - s_i)^{m_i - 1}}{(m_i - 1)!} f_m(s)\, ds. \end{aligned}$$

Ist U eine offene, nichtleere Teilmenge des $\mathbb{R}^n$, so versteht man unter $C^m(U)$ die Menge aller stetigen, reellwertigen Funktionen f auf U, welche für $0 \leqslant p \leqslant m$ stetige, von der Differentiationsreihenfolge unabhängige, partielle Ableitungen $f^{(p)}$ auf U besitzen. Mit $C^m(\Omega)$ bezeichnen wir nun die Menge aller auf Ω stetigen, reellwertigen Funktionen f, zu denen jeweils eine die Menge Ω enthaltende, offene Menge U_f existiert, so daß f eine Fortsetzung $\tilde{f}$ auf U_f besitzt, welche zu $C^m(U_f)$ gehört.

Der nächste Satz zeigt, daß die Funktionen aus $C^m(\Omega)$ in gewisser Hinsicht als Funktionen aus $K^m(\Omega)$ aufgefaßt werden können.

SATZ 1.3. *Jede Funktion $f \in C^m(\Omega)$ besitzt eine Fortsetzung $\tilde{f} \in K^m(\Omega)$. Umgekehrt gehört die Restriktion jeder Funktion $g \in K^m(\Omega)$ zu $C^{m-1}(\Omega)$.*

Beweis. Es sei $f \in C^m(\Omega)$. Wir zeigen durch Induktion nach der Dimension n, daß f auf Ω die folgende Taylorentwicklung mit Integralrestgliedern besitzt:

$$\begin{aligned} f(x_1, \ldots, x_n) = & \sum_{0 \leqslant p \leqslant m-1} f^{(p)}(z) \prod_{i=1}^{n} \frac{(x_i - z_i)^{p_i}}{p_i!} \\ & + \sum_{\substack{0 \leqslant p_J \leqslant m_J - 1_J \\ 1 \leqslant |J| \leqslant n-1}} \int_{z_i}^{x_i} \underset{i \in J^c}{\cdots} \int_{z_i}^{x_i} k_{p_J}(x, s_{J^c}) f^{(p_J, m_{J^c})}(z_J, s_{J^c}) \, ds_{J^c} \\ & + \int_{z_1}^{x_1} \cdots \int_{z_n}^{x_n} \prod_{i=1}^{n} \frac{(x_i - s_i)^{m_i - 1}}{(m_i - 1)!} f^{(m)}(s) \, ds, \end{aligned}$$

wobei $f^{(p)}(z)$ die p-ten partiellen Ableitungen von f an der Stelle z bedeuten.

Es sei $n = 1$. Dann ist Ω ein abgeschlossenes Intervall $[a, b]$. Für $z \in [a, b]$ und eine m-mal stetig differenzierbare Funktion $f \in C^m([a, b])$ gilt bekanntlich die folgende Taylorentwicklung mit Integralrestglied:

$$f(x) = \sum_{p=0}^{m-1} f^{(p)}(z) \frac{(x - z)^p}{p!} + \int_z^x \frac{(x - s)^{m-1}}{(m - 1)!} f^{(m)}(s) \, ds.$$

Es sei nun $\Omega \subset \mathbb{R}^{n+1}$ und $x = (x_1, x_2, \ldots, x_{n+1}) \in \Omega$. Hält man $x_1, x_2, \ldots, x_n$ fest, so gilt

$$\begin{aligned} (1) \quad & f(x_1, \ldots, x_n, x_{n+1}) \\ & = \sum_{0 \leqslant p_{n+1} \leqslant m_{n+1} - 1} f^{(0, \ldots, 0, p_{n+1})}(x_1, \ldots, x_n, z_{n+1}) \frac{(x_{n+1} - z_{n+1})^{p_{n+1}}}{p_{n+1}!} \\ & + \int_{z_{n+1}}^{x_{n+1}} \frac{(x_{n+1} - s_{n+1})^{m_{n+1} - 1}}{(m_{n+1} - 1)!} f^{(0, \ldots, 0, m_{n+1})}(x_1, \ldots, x_n, s_{n+1}) \, ds_{n+1}. \end{aligned}$$

Sei $h_{p_{n+1}}(x_1,\dots,x_n) := f^{(0,\dots,0,p_{n+1})}(x_1,\dots,x_n,z_{n+1})$, $J := \{1,\dots,n\}$ und $\tilde{\Omega} := p_J(\Omega)$. Dann ist $h_{p_{n+1}} \in C^{(m_1,\dots,m_n)}(\tilde{\Omega})$ und $h_{p_{n+1}}^{(p_1,\dots,p_n)}(x_1,\dots,x_n) = f^{(p_1,\dots,p_n,p_{n+1})}(x_1,\dots,x_n,z_{n+1})$. Ferner ist für jedes $s_{n+1} \in p_{\{n+1\}}(\Omega)$ die Funktion $h_{s_{n+1}}(x_1,\dots,x_n) := f^{(0,\dots,0,m_{n+1})}(x_1,\dots,x_n,s_{n+1})$ aus $C^{(m_1,\dots,m_n)}(\tilde{\Omega})$.

Wir nehmen nun an, für die Dimension n sei die Existenz der behaupteten Taylorentwicklung bewiesen. Setzt man jetzt die nach Induktionsannahme existierenden Entwicklungen von $h_{p_{n+1}}$ und $h_{s_{n+1}}$ in die Darstellung (1) ein und beachtet man, daß

$$\mathscr{P}(\{1,\dots,n+1\}) = \mathscr{P}(\{1,\dots,n\}) \cup \{S \cup \{n+1\} : S \in \mathscr{P}(\{1,\dots,n\})\}$$

ist, so erhält man die gewünschte Taylorentwicklung von f auf Ω.

Setzt man die in dieser Taylorentwicklung auftretenden partiellen Ableitungen von f außerhalb Ω gleich Null, so definiert nunmehr die Taylorentwicklung von f eine Funktion $\tilde{f}$ auf ganz $\mathbb{R}^n$, welche eine Fortsetzung von f ist und zu $K^m(\Omega)$ gehört.

Es sei nun $f \in K^m(\Omega)$ durch eine Taylorentwicklung gegeben. Nach Lemma 1.1 besitzt f auf ganz $\mathbb{R}^n$ stetige partielle Ableitungen μ-ter Ordnung für $0 \leqslant \mu \leqslant m-1$. Es gilt[2]

$$f^{(\mu)}(x) = \sum_{0 \leqslant p \leqslant m-1} c_p \prod_{i=1}^{n} \frac{(x_i - z_i)^{p_i - \mu_i}}{(p_i - \mu_i)!} + \sum_{\substack{0 \leqslant p_J \leqslant m_J - 1_J \\ 1 \leqslant |J| \leqslant n-1}} \prod_{i \in J} \frac{(x_i - z_i)^{p_i - \mu_i}}{(p_i - \mu_i)!}$$

$$\times \int_{z_i}^{x_i} \underset{i \in J^c}{\cdots} \int_{z_i}^{x_i} \prod_{i \in J^c} \frac{(x_i - s_i)^{m_i - 1 - \mu_i}}{(m_i - 1 - \mu_i)!} f_{p_J}(s_{J^c})\, ds_{J^c}$$

$$+ \int_{z_1}^{x_1} \cdots \int_{z_n}^{x_n} \prod_{i=1}^{n} \frac{(x_i - s_i)^{m_i - 1 - \mu_i}}{(m_i - 1 - \mu_i)!} f_m(s)\, ds.$$

Es ist also die Restriktion von f auf Ω aus $C^{(m-1)}(\Omega)$. Q.E.D.

Aus der vorher angegebenen Darstellung der μ-ten partiellen Ableitung von f läßt sich sofort das folgende Korollar ableiten:

[2] Für $\mu_i > p_i$ ist $(x_i - z_i)^{p_i - \mu_i}/(p_i - \mu_i)! :\equiv 0$.

KOROLLAR 1.4. *Sei $f \in K^m(\Omega)$ mit der Darstellung*

$$f(x) = \sum_{0 \leqslant p \leqslant m-1} c_p \prod_{i=1}^{n} \frac{(x_i - z_i)^{p_i}}{p_i!}$$

$$+ \sum_{\substack{0 \leqslant p_J \leqslant m_J - 1_J \\ 1 \leqslant |J| \leqslant n-1}} \int_{z_i}^{x_i} \underset{i \in J^c}{\cdots} \int_{z_i}^{x_i} k_{p_J}(x, s_{J^c}) f_{p_J}(s_{J^c})\, ds_{J^c}$$

$$+ \int_{z_1}^{x_1} \cdots \int_{z_n}^{x_n} \prod_{i=1}^{n} \frac{(x_i - s_i)^{m_i - 1}}{(m_i - 1)!} f_m(s)\, ds.$$

Dann gilt:

(i) $f^{(\mu)}(z) = c_\mu$ *für* $0 \leqslant \mu \leqslant m - 1$.

(ii) $$f(z_J, x_{J^c})^{(\mu_J,\, m_{J^c} - 1_{J^c})} = \int_{z_i}^{x_i} \underset{i \in J^c}{\cdots} \int_{z_i}^{x_i} f_{\mu_J}(s_{J^c})\, ds_{J^c} + c_{(\mu_J, m_{J^c} - 1_{J^c})}$$

für $J \subset \{1,\ldots, n\}$, $1 \leqslant |J| \leqslant n - 1$ *und* $0 \leqslant \mu_J \leqslant m_J - 1_J$.

(iii) $$f^{(m-1)}(x) = \int_{z_1}^{x_1} \cdots \int_{z_n}^{x_n} f_m(s)\, ds + c_{m-1}$$

$$+ \sum_{1 \leqslant |J| \leqslant n-1} \int_{z_i}^{x_i} \underset{i \in J^c}{\cdots} \int_{z_i}^{x_i} f_{m_J - 1_J}(s_{J^c})\, ds_{J^c}.$$

SATZ 1.5. *Es sei $f \in K^m(\Omega)$. Dann ist die Taylorentwicklung von f im Sinne von* 1.2 *eindeutig bestimmt, d.h., die Größen c_p, f_{p_J} und f_m sind eindeutig bestimmt, können daher als "Koordinaten" von f aufgefaßt werden.*

Beweis. Die Eindeutigkeit der c_p folgt aus Korollar 1.4(i). Aufgrund der Eindeutigkeit der c_p genügt es, zum Nachweis der Eindeutigkeit der f_{p_J} nach 1.4(ii) folgendes zu zeigen: Aus $g_1, g_2 \in L^2(\mathbb{R}^n)$, $z \in \mathbb{R}^n$ und $\int_{z_1}^{x_1} \cdots \int_{z_n}^{x_n} g_1(s)\, ds = \int_{z_1}^{x_1} \cdots \int_{z_n}^{x_n} g_2(s)\, ds$ für alle $x \in \mathbb{R}^n$ folgt $g_1 = g_2$ fast überall. Dies ist aber gerade die Aussage von Lemma 1.1(β).

Aufgrund der Eindeutigkeit der c_p und f_{p_J} folgt aus Korollar 1.4(iii) mit derselben Überlegung die Eindeutigkeit von f_m. Q.E.D.

Der Funktionenraum $K^m(\Omega)$ ist offensichtlich ein reeller Vektorraum. Wir führen nun auf $K^m(\Omega)$ folgende Norm ein:

$$\|f\| = \max \begin{cases} \|f^{(\mu)}\|_\infty : 0 \leqslant \mu \leqslant m - 1 \\ \|f_{p_J}\|_H : 1 \leqslant |J| \leqslant n - 1,\ 0 \leqslant p_J \leqslant m_J - 1_J \\ \|f_m\|_H \end{cases}$$

wobei $\|\cdot\|_\infty$ die Supremumsnorm auf Ω und $\|\cdot\|_H$ die L^2-Norm in den jeweiligen Integrationsräumen bedeutet. Die Normeigenschaften der Abbildung $f \mapsto \|f\|$ lassen sich leicht nachweisen, z.B., $\|f\| = 0$ hat zur Folge, daß alle Koordinaten von f Null sind, was aber $f = 0$ bedeutet.

SATZ 1.6. *Der Vektorraum $K^m(\Omega)$ mit der Norm $\|f\|$ ist ein reeller Banachraum.*

Beweis. Sei (f_n) eine Cauchy-Folge. Dann bilden die einzelnen Koordinaten Cauchy-Folgen in den vollständigen Koordinatenräumen. Die Funktion $f \in K^m(\Omega)$, welche als Koordinaten gerade die Grenzwerte der Koordinatenfolgen besitzt, ist dann Limes der Folge (f_n).

SATZ 1.7. *Der starke Dual $K^m(\Omega)'$ besteht genau aus den Linearformen y der folgenden Gestalt: Für $f = (c_p, f_{p_J}, f_m)$ ist*

$$y(f) = \sum_{0 \leqslant p \leqslant m-1} \int_\Omega f^{(p)}(x)\, d\mu_p(x)$$

$$+ \sum_{\substack{1 \leqslant p_J \leqslant m_J - 1_J \\ 1 \leqslant |J| \leqslant n-1}} \int_{\Omega_{J^c}} f_{p_J} \cdot g_{p_J} d(x_{J^c}) + \int_\Omega f_m \cdot g_m \, dx,$$

wobei μ_p Radonmaß auf Ω, $g_{p_J} \in L^2(\Omega_{J^c})$, und $g_m \in L^2(\Omega)$ ist.

Beweis. Es sei $\mathscr{C}_p := C(\Omega)^3$ für $0 \leqslant p \leqslant m-1$ und $H_{p_J} := L^2(\Omega_{J^c})$ für $1 \leqslant |J| \leqslant n-1$ und $0 \leqslant p_J \leqslant m_J - 1_J$. Ferner sei der Produktraum

$$X := \prod_{0 \leqslant p \leqslant m-1} \mathscr{C}_p \times \prod_{\substack{0 \leqslant p_J \leqslant m_J - 1_J \\ 1 \leqslant |J| \leqslant n-1}} H_{p_J} \times L^2(\Omega)$$

mit der Maximumsnorm versehen. Wir betrachten nun die Abbildung Φ von $K^m(\Omega)$ in X, welche durch

$$\Phi(f) := \Big(\prod_{0 \leqslant p \leqslant m-1} f^{(p)} \times \prod_{\substack{0 \leqslant p_J \leqslant m_J - 1_J \\ 1 \leqslant |J| \leqslant n-1}} f_{p_J} \times f_m \Big)$$

für alle $f \in K^m(\Omega)$ definiert ist. Dann ist Φ eine isometrische Einbettung von $K^m(\Omega)$ in X.

Sei nun y eine stetige Linearform auf $K^m(\Omega)$. Dann ist $y \circ \Phi^{-1}$ eine stetige Linearform auf $\Phi(K^m(\Omega)) \subset X$, welche nach dem Satz von Hahn-Banach eine stetige lineare Fortsetzung auf ganz X besitzt. Diese Fortsetzung läßt

[3] Mit $C(\Omega)$ bezeichnen wir den Banachraum der reellwertigen stetigen Funktionen auf Ω, versehen mit der Supremumsnorm.

sich aber bekanntlich in der im Satz angegebenen Form darstellen. Hieraus folgt

$$y(f) = y \circ \Phi^{-1}(\Phi(f)) = \sum_{0 \leqslant p \leqslant m-1} \int_\Omega f^{(p)}\, d\mu_p(x) + \sum_{\substack{1 \leqslant p_J \leqslant m_J - 1_J \\ 1 \leqslant |J| \leqslant n-1}} \int_{\Omega_{J^c}} f_{p_J} \cdot g_{p_J} d(x_{J^c}) + \int_\Omega f_m \cdot g_m\, dx$$

für all $f \in K^m(\Omega)$.

Die Umkehrung ist trivial.

Bemerkung. Daß die Menge Ω die lokale Quadereigenschaft (Q) besitzt, haben wir nur gefordert, um Satz 1.3 beweisen zu können. Verzichtet man auf die Aussage des Satzes 1.3, so kann man bei der Definition von $K^m(\Omega)$ als Ω jede kompakte, nichtleere Teilmenge des $\mathbb{R}^n$ wählen. Die Eigenschaft (Q) ist für alle Ergebnisse dieser Arbeit, ausgenommen Satz 1.3, bedeutungslos.

2. Spline-Interpolation in $K^m(\Omega)$

In diesem Abschnitt behandeln wir das Problem der Spline-Interpolation in $K^m(\Omega)$ im Rahmen der von Scheffold [12] entwickelten Spline-Theorie. Dazu betrachten wir die Hilbertraumsumme

$$H := \bigoplus_{\substack{0 \leqslant p_J \leqslant m_J - 1_J \\ 1 \leqslant |J| \leqslant n-1}} H_{p_J} \oplus L_2(\Omega),$$

versehen mit dem kanonischen inneren Produkt

$$(f, g)_H = \sum_{\substack{0 \leqslant p_J \leqslant m_J - 1_J \\ 1 \leqslant |J| \leqslant n-1}} (f_{p_J}, g_{p_J}) + (\tilde{f}, \tilde{g}).$$

Ist nun L diejenige Abbildung von $K^m(\Omega)$ nach H, welche jedem $f \in K^m(\Omega)$ seine "Koordinaten" in H zuordnet, also

$$L(f) = ((f_{p_J})_{\substack{0 \leqslant p_J \leqslant m_J - 1_J \\ 1 \leqslant |J| \leqslant n-1}}, f_m),$$

so wird durch $(f, g) := (Lf, Lg)_H$ mittels Strukturtransport eine positiv semidefinite Hermitesche Form auf $K^m(\Omega)$ definiert.

Um dieselben Bezeichnungen wie in Scheffold [12] zu erhalten, setzen wir $E := K^m(\Omega)$ und $p(f) := (f, f)^{1/2}$ für alle $f \in K^m(\Omega)$. Dann ist p eine

Halbnorm auf E mit Nullraum $N := p^{-1}(0)$ ($=$ Kern L). Es gilt offensichtlich

$$N = \left\{ f \in K^m(\Omega) : f(x) = \sum_{0 \leqslant p \leqslant m-1} c_p \prod_{i=1}^{n} \frac{(x_i - z_i)^{p_i}}{p_i!} \text{ für alle } x \in \mathbb{R}^n \right\}.$$

Der Teilraum

$$M := \{ f \in K^m(\Omega) : c_p = f^{(p)}(z) = 0 \text{ für } 0 \leqslant p \leqslant m-1 \}$$

ist ein algebraisches Komplement des endlich dimensionalen Teilraumes N von E. E ist also algebraische direkte Summe von M und N.

Die Restriktion der positiv semidefiniten Hermiteschen Form $(f, g) := (Lf, Lg)_H$ auf den Teilraum M definiert ein inneres Produkt auf M, das kanonische innere Produkt auf M. Ferner ist der Quotientenraum $\hat{E} := E/N$, versehen mit dem kanonischen inneren Produkt $(\hat{f}, \hat{g}) := (f, g)$, ein Prähilbertraum.

Die Prähilberträume M und $\hat{E}$ sind offensichtlich isomorph. Da die Einschränkung L_M der Abbildung L auf den Teilraum M ein Hilbertraumisomorphismus zwischen M und H ist, sind also M und $\hat{E}$ sogar vollständig, also Hilberträume.

Aus der Definition der Norm auf dem Banachraum E ($:=$ Banachraum $K^m(\Omega)$ von 1.6) folgt sofort, daß die zu der Zerlegung $E = M \oplus N$ gehörige Projektion p_M eine stetige Abbildung vom Banachraum E auf den Hilbertraum M ist. Bezeichnet φ die kanonische Abbildung von E auf $\hat{E}$, so gilt $\varphi = \varphi_M \circ p_M$, wobei φ_M die Einschränkung von φ auf M bedeutet. Da φ_M ein Hilbertraumisomorphismus zwischen M und $\hat{E}$ ist, ergibt sich aus dieser Darstellung, daß φ eine stetige Abbildung vom Banachraum E auf den Hilbertraum $\hat{E}$ ist. Im Banachraum E ist N als endlich dimensionaler Teilraum ein topologisches Supplement des Teilraumes M. Damit sind alle Voraussetzungen zur Anwendung der Theorie von Scheffold [12] gegeben.

DEFINITION 2.1. Es sei $f \in K^m(\Omega)$ und $\{y_i\}_{i \in I}$ (I Indexmenge) eine Familie stetiger Linearformen auf dem Banachraum $K^m(\Omega)$. Eine Funktion $s_f \in K^m(\Omega)$ heißt eine L-Spline-Funktion, welche f bezüglich $\{y_i\}_{i \in I}$ interpoliert, falls gilt:

(α) $y_i(s_f) = y_i(f)$ für alle $i \in I$,

(β) $p(s_f) \leqslant p(g)$ für alle $g \in K^m(\Omega)$ mit $y_i(f) = y_i(g)$ für alle $i \in I$.

Aufgrund von [12, 2.6.i und 1.5.(2)] gilt nun das folgende

THEOREM 2.2. (*Existenz und Eindeutigkeit von L-Spline-Funktionen*). *Es sei $f \in K^m(\Omega)$ und $\{y_i\}_{i \in I}$ eine Familie stetiger Linearformen auf dem Banachraum $K^m(\Omega)$. Dann gilt*:

(α) *Es existiert mindestens eine L-Spline-Funktion s_f, welche f bezüglich $\{y_i\}_{i\in I}$ interpoliert.*

(β) *Folgt aus $g \in N$ und $y_i(g) = 0$ für alle $i \in I$ stets $g = 0$, so ist s_f eindeutig bestimmt.*

Es bezeichne $\partial\Omega$ den topologischen Rand von Ω.

KOROLLAR 2.3 (Verallgemeinertes Dirichlet-Prinzip). *Zu jedem $f \in K^m(\Omega)$ gibt es mindestens ein $g \in K^m(\Omega)$, so daß gilt:*

$$f_{|\partial\Omega} = g_{|\partial\Omega} \text{ (d.h. } f(x) = g(x) \text{ für alle } x \in \partial\Omega)$$

und $p(g) \leqslant p(h)$ für alle $h \in K^m(\Omega)$ mit $h_{|\partial\Omega} = f_{|\partial\Omega}$.

Beweis. Man wähle $\{y_i\}_{i\in I} := \{\epsilon_x : x \in \Omega\}$, wobei ϵ_x das Dirac-Maß an der Stelle x bezeichnet.

3. Approximation von Linearformen im Sinne von Sard

Mit Hilfe der Taylorentwicklung der Funktionen aus $K^m(\Omega)$ leiten wir zunächst für Funktionen f aus dem Teilraum M von $K^m(\Omega)$ eine spezielle Darstellung der Linearformen aus dem starken topologischen Dual $K^m(\Omega)'$ her.

Es sei $f \in M$ und $y \in K^m(\Omega)'$. Dann besitzt f die Darstellung

$$f(x) = \sum_{\substack{0 \leqslant p_J \leqslant m_J - 1_J \\ 1 \leqslant |J| \leqslant n-1}} \int_{z_i}^{x_i} \underset{i\in J^c}{\cdots} \int_{z_i}^{x_i} k_{p_J}(x, s_{J^c}) f_{p_J}(s_{J^c})\, ds_{J^c}$$

$$+ \int_{z_1}^{x_1} \cdots \int_{z_n}^{x_n} \prod_{i=1}^{n} \frac{(x_i - s_i)^{m_i - 1}}{(m_i - 1)!} f_m(s)\, ds \qquad \text{für alle } x \in \mathbb{R}^n.$$

Wir betrachten nun ein festes p_J.

Für $x \in \mathbb{R}^n$ bezeichne $\chi_{p_J}(x, s_{J^c})$ die charakteristische Funktion des Quaders $\prod_{i\in J^c} | z_i, x_i |$ in $\prod_{i\in J^c} R_i$ ($R_i = \mathbb{R}$). Ferner sei

$$\psi_{p_J}(x, s_{J^c}) := \Big(\prod_{i\in J^c} \operatorname{sign}(x_i - z_i)\Big) \cdot \chi_{p_J}(x, s_{J^c}).$$

Wählt man für die Linearform y die in Satz 1.7 angegebene Darstellung, so erhält man unter Anwendung des Lemmas 1.1 und des Satzes von Fubini:

$$y\left(\int_{z_i}^{x_i} \underset{i\in J^c}{\cdots} \int_{z_i}^{x_i} k_{p_J}(x, s_{J^c}) f_{p_J}(s_{J^c})\, ds_{J^c}\right)$$

$$= \sum_{0\leqslant\tilde{p}\leqslant m-1} \int_\Omega \left(\int_{z_i}^{x_i} \underset{i\in J^c}{\cdots} \int_{z_i}^{x_i} k_{p_J}(x, s_{J^c}) f_{p_J}(s_{J^c})\, ds_{J^c}\right)^{(\tilde{p})} \cdot d\mu_{\tilde{p}}(x)$$

$$+ \int_{\Omega_{J^c}} f_{p_J}(s_{J^c})\, g_{p_J}(s_{J^c})\, ds_{J^c}$$

$$= \sum_{0\leqslant\tilde{p}\leqslant m-1} \int_\Omega \left(\int_{z_i}^{x_i} \underset{i\in J^c}{\cdots} \int_{z_i}^{x_i} k_{p_J}^{(\tilde{p})}(x, s_{J^c}) f_{p_J}(s_{J^c})\, ds_{J^c}\right) d\mu_{\tilde{p}}(x)$$

$$+ \int_{\Omega_{J^c}} f_{p_J}(s_{J^c})\, g_{p_J}(s_{J^c})\, ds_{J^c}$$

$$= \sum_{0\leqslant\tilde{p}\leqslant m-1} \int_\Omega \left(\int_{\Omega_{J^c}} \psi_{p_J}(x, s_{J^c})\, k_{p_J}^{(\tilde{p})}(x, s_{J^c}) f_{p_J}(s_{J^c})\, ds_{J^c}\right) \cdot d\mu_{\tilde{p}}(x)$$

$$+ \int_{\Omega_{J^c}} f_{p_J}(s_{J^c})\, g_{p_J}(s_{J^c})\, ds_{J^c}$$

$$= \int_{\Omega_{J^c}} \left(\sum_{0\leqslant\tilde{p}\leqslant m-1} \int_\Omega \psi_{p_J}(x, s_{J^c})\, k_{p_J}^{(\tilde{p})}(x, s_{J^c})\, d\mu_{\tilde{p}}(x) + g_{p_J}(s_{J^c})\right) f_{p_J}(s_{J^c})\, ds_{J^c}\,.$$

Mit

$$k_m(x, s) := \prod_{i=1}^{n} \frac{(x_i - s_i)^{m_i-1}}{(m_i - 1)!}$$

erhält man auf dieselbe Weise

$$y\left(\int_{z_1}^{x_1} \cdots \int_{z_n}^{x_n} \prod_{i=1}^{n} \frac{(x_i - s_i)^{m_i-1}}{(m_i - 1)!} f_m(s)\, ds\right)$$

$$= \int_\Omega \left\{\sum_{0\leqslant\tilde{p}\leqslant m-1} \int_\Omega \psi_m(x, s)\, k_m^{(\tilde{p})}(x, s)\, d\mu_{\tilde{p}}(x) + g_m(s)\right\} \cdot f_m(s)\, ds.$$

Setzt man

$$\tilde{y}_{p_J}(s_{J^c}) := \sum_{0\leqslant\tilde{p}\leqslant m-1} \int_\Omega \psi_{p_J}(x, s_{J^c})\, k_{p_J}^{(\tilde{p})}(x, s_{J^c})\, d\mu_{\tilde{p}}(x) + g_{p_J}(s_{J^c})$$

und

$$\tilde{y}_m(s) = \sum_{0\leqslant\tilde{p}\leqslant m-1} \int_\Omega \psi_m(x, s)\, k_m^{(\tilde{p})}(x, s)\, d\mu_{\tilde{p}}(x) + g_m(s),$$

so erhalten wir die folgende

"PEANOKERN-DARSTELLUNG" der Linearform y:

3.1. *Es ist*

$$y(f) = \sum_{\substack{0 \leqslant p_J \leqslant m_J - 1_J \\ 1 \leqslant |J| \leqslant n-1}} \int_{\Omega_{J^c}} \tilde{\tilde{y}}_{p_J}(s_{J^c}) f_{p_J}(s_{J^c})\, ds_{J^c} + \int_{\Omega} \tilde{\tilde{y}}_m(s) f_m(s)\, ds.$$

Bezeichnet $\tilde{\tilde{y}}$ dasjenige Element aus dem Hilbertraum H, welches die Koordinaten

$$((\tilde{\tilde{y}}_{p_J})_{\substack{0 \leqslant p_J \leqslant m_J - 1_J \\ 1 \leqslant |J| \leqslant n-1}}, \tilde{\tilde{y}}_m)$$

besitzt, so besagt die Darstellung 3.1 folgendes: Es ist $y(f) = (Lf, \tilde{\tilde{y}})_H$ für alle $f \in M$. Setzt man $\tilde{y} := L_M^{-1}\tilde{\tilde{y}}$, so gilt $y(f) = (f, \tilde{y})$ für alle $f \in M$, wobei $(f, \tilde{y})$ das kanonische innere Produkt von M ist.

Verschwindet die Linearform y auf N, so ist die Norm von $\tilde{\tilde{y}}$ in H—wir nennen sie die H-Norm von y—gleich der $\|\cdot\|_e$-Norm von y in [12], 2.7 bzw. gleich der Norm von $\hat{y} \in \mathscr{L}(\hat{E}, \mathbb{R})$ in [13], Satz 8.

Aus [12], 2.7 bzw. [13], Satz 8 ergibt sich daher sofort der folgende Approximationssatz:

THEOREM 3.2. *Es seien y_i k linear unabhängige Linearformen aus $K^m(\Omega)'$ mit der Eigenschaft: $f \in N$ und $y_i(f) = 0$ $(1 \leqslant i \leqslant k)$ impliziert $f = 0$. Ferner sei $y \in K^m(\Omega)'$ und $\bar{y}$ eine Linearkombination der y_i. Dann gibt es k eindeutig bestimmte L-Spline-Funktionen $s_i \in K^m(\Omega)$ mit $y_j(s_i) = \delta_{ij}$ (δ_{ij} Kroneckersymbol). Verschwindet $y - \bar{y}$ auf N, so gilt in H die Ungleichung*

$$\left\| \widetilde{\widetilde{y - \sum_{i=1}^{k} y(s_i)\, y_i}} \right\| \leqslant \| \widetilde{\widetilde{y - \bar{y}}} \|,$$

d.h., die Linearform $\sum_{i=1}^k y(s_i)\, y_i$ ist bezüglich allen Linearkombinationen der y_i, welche auf N mit y übereinstimmen, im Hinblick auf die H-Norm eine beste Approximation zu der Linearform y.

4. KONSTRUKTION VON L-SPLINE-FUNKTIONEN

In diesem Abschnitt wollen wir eine Methode zur Konstruktion von *L-Spline-Funktionen in $K^m(\Omega)$ beschreiben.*

Es seien y_i $(1 \leqslant i \leqslant k)$ k Linearformen aus $K^m(\Omega)'$, welche auf N linear abhängig[4] sind. Ferner sei $\tilde{y}_i := L_M^{-1}\tilde{\tilde{y}}_i$ für $1 \leqslant i \leqslant k$. Dann sind zwei Fälle zu unterscheiden:

[4] Sind die y_i linear unabhängig auf N, so ist das Spline-Interpolationsproblem ein reines Interpolationsproblem (vgl. [12, S. 273]).

(α) Die Linearformen y_i $(1 \leqslant i \leqslant k)$ verschwinden auf N. In diesem Fall sei $G := \langle \tilde{y}_1, \ldots, \tilde{y}_k \rangle$, wobei wir mit $\langle \tilde{y}_1, \ldots, \tilde{y}_k \rangle$ die lineare Hülle von $\{\tilde{y}_1, \ldots, \tilde{y}_k\}$ bezeichnen.

(β) Die Linearformen $y_{1|N}, \ldots, y_{m|N}$ $(1 \leqslant m < k)$ bilden im algebraischen Dual N^* von N eine Basis von $\langle y_{1|N}, \ldots, y_{k|N} \rangle$ (O.B.d.A. können wir diese Indizierung annehmen.)

Dann lassen sich die $y_{i|N}$ $(i = m+1, \ldots, k)$ als Linearkombination der $y_{i|N}$ $(1 \leqslant i \leqslant m)$ eindeutig in der Form

$$y_{i|N} = \sum_{\nu=1}^{m} a_r^{(i)} y_{\nu|N} \; (a_\nu^{(i)} \in \mathbb{C})$$

darstellen. In diesem Fall sei

$$G := \left\langle \tilde{y}_{m+1} - \sum_{\nu=1}^{m} a_\nu^{(m+1)} \tilde{y}_\nu, \ldots, \tilde{y}_k - \sum_{\nu=1}^{m} a_\nu^{(k)} \tilde{y}_\nu \right\rangle.$$

Es sei nun $g \in K^m(\Omega)$ und s_g eine L-Spline-Funktion, welche die Funktion g bezüglich der Linearformen y_i $(1 \leqslant i \leqslant k)$ interpoliert. Nach [12, 2.3] ist in beiden Fällen die M-Komponente $p_M(s_g)$ von s_g gleich der Orthogonalprojektion der M-Komponente $p_M(g)$ von g auf den Teilraum G des Hilbertraumes M. Bezeichnen wir die Orthogonalprojektion von M auf G mit P_G, so gilt also $p_M(s_g) = P_G(p_M(g))$. Hat man auf diese Weise die Komponente $p_M(s_g)$ bestimmt, so kann man in N eine Funktion h wählen—was eine reine Interpolationsaufgabe ist—so daß

$$y_i(h) = y_i(g - p_M(s_g)) \qquad (1 \leqslant i \leqslant k)$$

gilt.

Die Funktion $h + p_M(s_g)$ ist eine L-Spline-Funktion, welche g bezüglich der Linearformen y_i $(1 \leqslant i \leqslant k)$ interpoliert.

5. Ein Beispiel

Es sei $\Omega = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leqslant 1\}$ die abgeschlossene Einheitskreisscheibe. Dann besitzt Ω die Quadereigenschaft bezüglich des Punktes $z = (0, 0)$. Wir betrachten nun den Raum $K^{(2,2)}(\Omega)$, welcher aus allen Funktionen $f(x_1, x_2)$ mit der folgenden Taylorentwicklung besteht:

$$(*) \qquad f(x_1, x_2) = c_{0,0} + c_{1,0}x_1 + c_{0,1}x_2 + c_{1,1}x_1 \cdot x_2 + \int_0^{x_2} (x_2 - t) f_{0,1}(t)\, dt + \int_0^{x_2} x_1(x_2 - t) f_{1,1}(t)\, dt$$

$$+ \int_0^{x_1} (x_1 - s) f_{0,2}(s)\, ds + \int_0^{x_1} x_2(x_1 - s) f_{1,2}(s)\, ds$$

$$+ \int_0^{x_1} \int_0^{x_2} (x_1 - s)(x_2 - t) f_{2,2}(s, t)\, ds\, dt,$$

wobei $c_{i,k} \in \mathbb{R}$ $(i, k = 0, 1)$, $f_{0,1}, f_{1,1}, f_{0,2}, f_{1,2} \in L^2(\mathbb{R})$ und $\equiv 0$ außerhalb $[-1, 1]$, $f_{2,2} \in L^2(\mathbb{R}^2)$ und $\equiv 0$ außerhalb Ω.

Wir behalten die Bezeichnungen der Kap. 2–4 bei. In diesem Fall ist

$$p(f) = \left(\int_{\mathbb{R}} f_{0,1}^2 + f_{1,1}^2 + f_{0,2}^2 + f_{1,2}^2\, d\lambda + \int_{\mathbb{R}^2} f_{2,2}^2\, d\lambda^2\right)^{1/2}$$

für alle $f \in K^{(2,2)}(\Omega)$ (λ Lebesgue-Maß),

$$N = \{f \in K^{2,2}(\Omega) : f(x_1, x_2) = c_{0,0} + c_{1,0}x_1 + c_{0,1}x_2 + c_{1,1}x_1x_2\,;\ c_{i,k} \in \mathbb{R}\}$$

und

$$M = \{f \in K^{(2,2)}(\Omega) : \overset{(i,j)}{f}(0, 0) = 0 \text{ für } i = 0, 1 \text{ und } j = 0, 1\}.$$

Wir behandeln nun die Spline-Interpolation in $K^{(2,2)}(\Omega)$ bezüglich der Linearformen

$$y_1(f) = f(0, 0), \qquad y_2(f) = \frac{\partial f}{\partial x_1}(0, 0), \qquad y_3(f) = \frac{\partial f}{\partial x_2}(0, 0),$$

$$y_4(f) = \frac{\partial^2 f}{\partial x_1\, \partial x_2}(0, 0), \qquad y_5(f) = f(0, \tfrac{1}{2}),$$

$$y_6(f) = f(\tfrac{1}{2}, 0) \qquad \text{und} \qquad y_7(f) = \frac{\partial^2 f}{\partial x_1\, \partial x_2}(1, 0).$$

Die Linearformen y_i $(1 \leqslant i \leqslant 7)$ sind offensichtlich stetige Linearformen auf $K^{(2,2)}(\Omega)$, versehen mit der in Satz 1.6 eingeführten Normtopologie. Mit Hilfe der Taylorentwicklung an der Stelle $z = (0, 0)$ läßt sich leicht zeigen, daß

$$\langle y_{1|N}, y_{2|N}, y_{3|N}, y_{4|N}\rangle = N^*, \qquad y_{5|N} = y_{1|N} + \tfrac{1}{2} y_{3|N},$$

$$y_{6|N} = y_{1|N} + \tfrac{1}{2} y_{2|N} \qquad \text{und} \qquad y_{7|N} = y_{4|N} \quad \text{gilt.}$$

Aus Theorem 2.2 folgt nun, daß es zu jedem $f \in K^{(2,2)}(\Omega)$ genau eine L-Spline-Funktion $s_f \in K^{(2,2)}(\Omega)$ gibt, welche f bezüglich der Linearformen y_i $(1 \leqslant i \leqslant 7)$ interpoliert. Es bezeichne S den linearen Teilraum der L-Spline-Funktionen bezüglich der Linearformen y_i. Es ist $\dim S = 7$. Wir bestimmen eine Basis $\{s_1, s_2, \ldots, s_7\}$ von S mit der Eigenschaft $y_i(s_j) = \delta_{ij}$

$(1 \leqslant i \leqslant 7, 1 \leqslant j \leqslant 7)$. Durch partielle Differentiation erhält man aus der Taylorentwicklung (*) folgende Darstellungen für die Linearformen y_i: Für alle $f \in M$ ist

$$y_i(f) = 0 \qquad \text{für} \quad 1 \leqslant i \leqslant 4,$$

$$y_5(f) = \int_0^{1/2} (\tfrac{1}{2} - t) f_{0,1}(t)\, dt,$$

$$y_6(f) = \int_0^{1/2} (\tfrac{1}{2} - s) f_{0,2}(s)\, ds$$

und

$$y_7(f) = \int_0^1 f_{1,2}(s)\, ds.$$

Es sei M mit dem kanonischen inneren Produkt versehen. Wir bestimmen jetzt die Funktionen $\tilde{y}_i \in M$ mit der Eigenschaft $y_i(f) = (f, \tilde{y}_i)$ für alle $f \in M$. Aufgrund der vorhergehenden Darstellung der Linearformen y_i sehen die von 0 verschiedenen Koordinaten der Funktionen $\tilde{y}_i$ wie folgt aus:

$$\text{Für } \tilde{y}_5: \quad f_{0,1}(t) = \begin{cases} \frac{1}{2} - t & \text{für} \quad 0 \leqslant t \leqslant \frac{1}{2} \\ 0 & \text{sonst,} \end{cases}$$

$$\text{für } \tilde{y}_6: \quad f_{0,2}(s) = \begin{cases} \frac{1}{2} - s & \text{für} \quad 0 \leqslant s \leqslant \frac{1}{2} \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

und

$$\text{für } \tilde{y}_7: \quad f_{1,2}(s) = \begin{cases} 1 & \text{für} \quad 0 \leqslant s \leqslant 1 \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Die explizite Darstellung lautet dann:

$$\tilde{y}_i(x_1, x_2) \equiv 0 \qquad \text{für} \quad 1 \leqslant i \leqslant 4,$$

$$\tilde{y}_5(x_1, x_2) = \begin{cases} 0 & \text{für} \quad x_2 < 0 \\ \frac{1}{4}x_2^2 - (1/6)\, x_2^3 & \text{für} \quad 0 \leqslant x_2 \leqslant \frac{1}{2}, \\ (1/8)\, x_2 - (1/48) & \text{für} \quad x_2 > \frac{1}{2} \end{cases}$$

$$\tilde{y}_6(x_1, x_2) = \begin{cases} 0 & \text{für} \quad x_1 < 0 \\ \frac{1}{4}x_1^2 - (1/6)\, x_1^3 & \text{für} \quad 0 \leqslant x_1 \leqslant \frac{1}{2} \\ (1/8)\, x_1 - (1/48) & \text{für} \quad x_1 > \frac{1}{2} \end{cases}$$

und

$$\tilde{y}_7(x_1, x_2) = \begin{cases} 0 & \text{für} \quad x_1 < 0 \\ \frac{1}{2}x_1^2 x_2 & \text{für} \quad 0 \leqslant x_1 \leqslant 1. \\ x_1 x_2 - \frac{1}{2}x_2 & \text{für} \quad x_1 > 1 \end{cases}$$

Nach Fall (β) von Kap. 4 erhalten wir $G = \langle \tilde{y}_5, \tilde{y}_6, \tilde{y}_7 \rangle$. Dies bedeutet aber $S = N + G = \langle \tilde{s}_1, \tilde{s}_2, \tilde{s}_3, \tilde{s}_4, \tilde{y}_5, \tilde{y}_6, \tilde{y}_7 \rangle$ mit $\tilde{s}_1(x_1, x_2) \equiv 1$,

$\tilde{s}_2(x_1, x_2) = x_1$, $\tilde{s}_3(x_1, x_2) = x_2$ und $\tilde{s}_4(x_1, x_2) = x_1 \cdot x_2$. Die Basis $\{s_1, ..., s_7\}$ von S mit der Eigenschaft $y_i(s_j) = \delta_{ij}$ lautet dann:

$$s_1 = \tilde{s}_1 - 24(\tilde{y}_5 + \tilde{y}_6), \qquad s_2 = \tilde{s}_2 - 12\tilde{y}_6,$$

$$s_3 = \tilde{s}_3 - 12\tilde{y}_5, \qquad s_4 = \tilde{s}_4 - \tilde{y}_7, \qquad s_5 = 24\tilde{y}_5,$$

$$s_6 = 24\tilde{y}_6 \quad \text{und} \quad s_7 = \tilde{y}_7.$$

Für jedes $f \in K^{(2,2)}(\Omega)$ ist somit die Funktion $s_f = \sum_{i=1}^{7} y_i(f)\, s_i$ die eindeutig bestimmte Spline-Interpolierende, d.h., es gilt $y_i(f) = y_i(s_f)$ $(1 \leqslant i \leqslant 7)$ und $p(s_f) < p(g)$ für alle $g \in K^{(2,2)}(\Omega)$ mit $g \neq s_f$ und $y_i(g) = y_i(f)$ $(1 \leqslant i \leqslant 7)$.

Literatur

1. R. G. Bartle, "The Elements of Integration," Wiley, New York/London/Sydney, 1966.
2. F. J. Delvos and K.-H. Schlosser, Das Tensorproduktschema von Spline-Systemen, *in* "Spline-Funktionen. Vorträge und Aufsätze" (Herausgeber: K. Böhmer, G. Meinardus u. W. Schempp), S. 59–73. Bibliographisches Institut, Mannheim/Wien/Zürich, 1974.
3. H. W. Kösters and K.-H. Schlosser, On spaces related to bivariate spline-interpolation, to appear.
4. L. Mansfield, On the variational characterization and convergence of bivariate splines, *Numer. Math.* **20** (1972), 99–114.
5. L. Mansfield, Optimal approximation and error bounds in spaces of bivariate functions, *J. Approximation Theory* **5** (1972), 77–96.
6. L. Mansfield, On the optimal approximation of linear functionals in spaces of bivariate functions, *SIAM J. Numer. Anal.* **8** (1971), 115–126.
7. L. Mansfield, On the variational approach to defining splines on L-shaped regions, *J. Approximation Theory* **5** (1974), 99–112.
8. G. M. Nelson, Bivariate spline functions and the approximation of linear functionals, *Numer. Math.* **21** (1973), 138–160.
9. W. Ritter, Two dimensional spline functions and best approximations of linear functionals, *J. Approximation Theory* **3** (1970), 352–368.
10. A. Sard, Approximation based on nonscalar observations, *J. Approximation Theory* **8** (1973), 315–334.
11. A. Sard, "Linear Approximation," Amer. Math. Soc. Providence, R.I., 1963.
12. E. Scheffold, Das Spline-Problem als ein Approximationsproblem, *J. Approximation Theory* **12** (1974), 265–282.
13. E. Scheffold, Eine abstrakte Spline-Theorie, *in* "Spline-Funktionen. Vorträge und Aufsätze" (Herausgeber: K. Böhmer, G. Meinardus, W. Schempp), S. 257–274, Bibliographisches Institut, Mannheim-Wien-Zürich, 1974.
14. W. Schempp, On spaces of distributions related to Schoenberg's approximation theorem, *Math. Z.* **114** (1970), 340–348.
15. K.-H. Schlosser, Zur mehrdimensionalen Spline-Interpolation, Dissertation. 79 S., Bochum, 1974.

16. K.-H. SCHLOSSER, Mehrdimensionale Spline-Interpolation mittels Spline-Systemen. *Z. Angew. Math. Mech.* **55** (1975), T260–T262.
17. K.-H. SCHLOSSER, Mehrdimensionale Spline-Interpolation mit Hilfe der Methode von Sard, to appear.
18. I. J. SCHOENBERG, On best approximations of linear operators. *Nederl. Akad. Wetensch. Indag. Math.* **26** (1964), 155–163.